$(x=4,\ y=2)$ det $\begin{bmatrix}2 & -4\\ -4 & 12\end{bmatrix} = 48-16>0 \Rightarrow$ minimum

dla $(x=-\frac{4}{3},\ y=-\frac{2}{3})$ det $\begin{bmatrix}2 & -4\\ -4 & -4\end{bmatrix} = -8-16<0$

$f(x,y)=x^2+y^2$ $\equiv$ $\partial f/\partial x=0$ oraz $\partial f/\partial y=0$

badanie ekstremów

$$\det\begin{vmatrix}\partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x\partial y\\ \partial^2 f/\partial x\partial y & \partial^2 f/\partial y^2\end{vmatrix}_{(x_0,y_0)} \geq 0 \Rightarrow \text{ekstremum}$$

2. Ekstrema warunkowe

optymalizacja

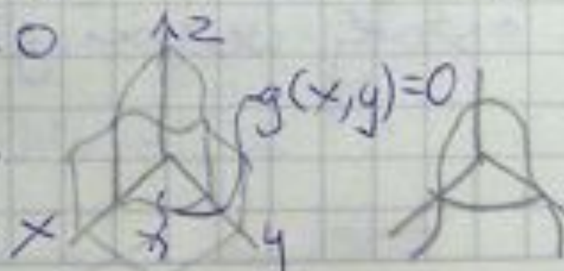
$f(x,y)=4x^2-4xy+y^2$ $\quad$ $g(x,y)=x^2+y^2+1$

minimum f przy założeniu, że $g=0$

ukł. zachowawczy (Newton'a mech.:

Kepler'a zachowanie prędkości.)

'więzy'!!

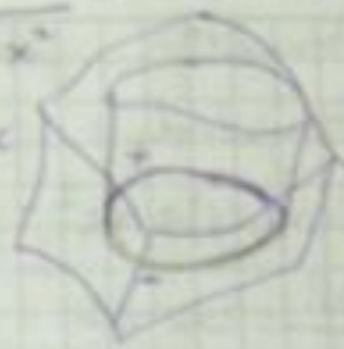


Metoda współczynników nieoznaczonych

Lagrange'a – [illegible]

jeżeli $g(x,y)=0$ to [illegible] $y=\pm\sqrt{1-x^2}$

$f(x,y)=4(1-x^2)-4x\sqrt{1-x^2}+4x^2$ podstawiając



3. [illegible] przy założeniu $g(x,y)=0$

$F(x,y)=f(x,$[redacted]$y)+\lambda g(x,y)$ podstawiając

$F(x,y)=y^2-4xy+4x^2+\lambda(x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases} \partial F/\partial x = -4y+8x+2x\lambda=0 \quad /:2 \\ \partial F/\partial y = 2y-4x+2\lambda y=0 \quad /:2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

przyrównujemy pochodne cząstkowe do zera

$x(4+\lambda)-2y=0$ $\qquad x=-2y$

$y(1+\lambda)-2x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}y(1+\lambda)$

$1/2\,y(1+\lambda)(4+\lambda)-2y=0 \qquad y\left(\frac{1}{2}(1+\lambda)(4+\lambda)-2\right)=0$

$\Leftrightarrow y=0 \lor \frac{1}{2}(1+\lambda)(4+\lambda)-2=0 \;/\cdot 2$

$(1+\lambda)(4+\lambda)=4 \qquad 4+\lambda+4\lambda+\lambda^2=4 \qquad \lambda(\lambda+5)=0$

$\lambda=0 \lor \lambda=-5 \qquad x^2+y^2=1$ [illegible]

$\lambda = 0 \lor \lambda = -5 \qquad x^2 + y^2 = 1 \qquad \lambda = 0 \qquad x = 1/2\, y \Rightarrow$

$1/4\, y^2 + y^2 = 1 \qquad 5/4\, y^2 = 1 \qquad y = \pm\sqrt{4/5} = \pm 2/\sqrt{5}$

$x = \pm 1/\sqrt{5} \qquad \lambda = -5 \qquad x = -2y \qquad 4y^2 + y^2 = 1$

$y^2 = 1/5 \qquad y = \pm 1/\sqrt{5} \qquad x = \pm 2/\sqrt{5}$

(x,y)	$1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5}$	$-1/\sqrt{5},\ -2/\sqrt{5}$	$-2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5}$	$2/\sqrt{5},\ -1/\sqrt{5}$
$f(x,y)$	0	0	5	$13/5$
	min	min	max	

$4/5 - 4\cdot 2/5 + 4\cdot 1/5 = 0 \qquad 1/5 + 4\cdot 2/5 + 4\cdot 4/5 = 25/5$

$4/5 + 4\cdot 2/5 + 4\cdot 1/5 = 13/5$

poziomica ostatniej wartości $g \leftarrow$ $f(x,y,z)$, $g(x,y,z) = 0$

Regresja liniowa

każda funkcja ciągła jest pochodną funkcji: $\ln|x| = \begin{cases} \ln(-x) & x<0 \\ \ln x & x>0 \end{cases}$

x - wzrost; y - masa $\quad y = ax+b$

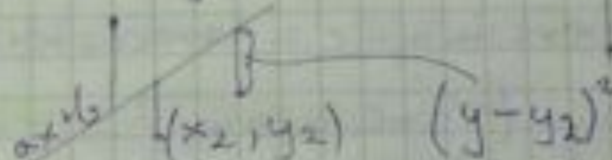
(x_1, y_1)

(x_2, y_2)

$\vdots$

(x_n, y_n)

Suma odległości punktów od prostej minimalna.



x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

$$\sum_{i=1}^{n} (a x_i + b - y_i)^2 = \Phi(a;b) \text{ niewiadome}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2(a x_i + b - y_i) \cdot x_i = 0 \quad /:2 \\[2mm] \sum_{i=1}^{n} 2(a x_i + b - y_i) \cdot 1 = 0 \quad /:2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (a x_i^2 + b x_i - x_i y_i) = 0 \\[2mm] \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

$$a\left(\sum^{n} x_i^2\right) + b\left(\sum^{n} x_i\right) = \sum^{n} x_i y_i$$

$$\begin{cases} a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$ // minimum

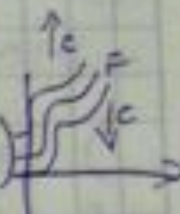
Def. F jest funkcją pierwotną dla f na dziedzinie D jeżeli $F'(x)=f(x)$ $\forall x \in D$. Jeżeli F i G są jednocześnie funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji f ~~to~~

$F(x)=G(x)+c$ $\quad F'(x)=f(x)=G'(x)$

$F'(x)-G'(x)=(F(x)-G(x))'=0$

Całką nieoznaczoną z f, $\int f(x)\,dx$ nazywamy dowolną funkcję pierwotną f

$\int f(x)\,dx = F(x)+C$ $\quad (F(x)+c)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$



np: $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}+C$ $\quad r \neq -1$

$\int \sqrt[3]{x^7}\,dx = \int x^{7/3}\,dx = 1/(7/3+1)\, x^{7/3+1}+c = \frac{3}{10}x^{10/3}+c$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C$

Całkowanie przez części

$\int 1\,dx = x$ (matelitejki oen. pochodne f-cji elementarnych)

$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ $\quad$ $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

$\int 1/\cos^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + c$ $\quad$ $\int 1/\sin^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$

$\int a^x\,dx = a^x \cdot 1/\ln a + c$ $\quad$ $\int dx/1+x^2 = \operatorname{arctg} x + c$

$\int dx/\sqrt{1-x^2} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$

$\int dx$ $\quad$ $\frac{d}{dx}$ $\quad$ $\int dx$

f-cje elementarne

Liniowość całkowania (różniczkowania)

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

$$\int (f(x)\,g(x))\,dx \neq \left(\int f(x)\,dx\right)\left(\int g(x)\,dx\right)$$

4. $\int f = F$ $\quad$ $\int g = G$

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$$

$$fG = (FG)' - Fg$$

$$\int f(x) \cdot G(x)\,dx = \underbrace{\int (F(x) \cdot G(x))'\,dx}_{F(x) \cdot G(x)} - \int F(x)\,g(x)\,dx$$

$$\int F(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,G(x) - \int f(x)\,G(x)\,dx$$

np: $\int x e^x\,dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = x e^x - e^x + c$:)

$$\int f(x)\cdot G(x)\,dx = \underbrace{\int \left(\left(F(x)\cdot G(x)\right)'\right) dx}_{F(x)\cdot G(x)} - \int F(x)\, g(x)\,dx$$

$$\int F(x)\, g(x)\,dx = F(x)\, G(x) - \int f(x)\, G(x)\,dx$$

np: $\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + c$:)

$x = F$	$f = 1$
$e^x = g$	$G = e^x$

$x = f$	$F = 1/2\, x^2$
$e^x = G$	$g = e^x$

$= 1/2\, x^2 e^x - \int 1/2\, x^2 e^x dx$:(

a) $\int x \ln x\, dx \quad x = f \quad \ln x = G \quad F = 1/2\, x^2 \quad g = 1/x$

$\int x \ln x\, dx = 1/2\, x^2 \ln x - \int 1/2\, x^2\, 1/x\, dx = 1/2\, x^2 \ln x - 1/2 \int x\, dx =$

$1/2\, x^2 \ln x - 1/4\, x^2 + c$

b) $\int \sin^2 x\, dx = \int \sin x \cdot \sin x\, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx =$

$-\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\, dx = -\sin \cos x + \int 1\, dx - \int \sin^2 x\, dx$

$\int \sin^2 x\, dx = x - \sin x \cos x - \sin^2 x\, dx$

$\int \sin^2 x\, dx = 1/2\, (x - \sin x \cos x) + c$

$\sin x = f$	$F = -\cos x$
$\sin x = G$	$g = \cos x$

d) $\int \operatorname{arctg} x\, dx = \int 1 \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x/1+x^2\, dx =$

$x \operatorname{arctg} x - 1/2 \ln (1+x^2) + c$

$f = 1$	$F = x$
$G = \operatorname{arctg} x$	$g = 1/1+x^2$

całki eliptyczne ∴ | Całkowanie przez podstawienie. Całkowanie f-cji wymiernej
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$ → pochodna logarytmiczna

$(F(G(x)))' = F'(G(x)) \cdot G'(x) = f(G(x)) \cdot g(x)$

$\int f(G(x)) \cdot g(x)\, dx = F(G(x)) + c$

c) $1/2 \int e^{x^2} 2x\, dx$; $t = x^2$; $= 1/2 \int e^t dt = 1/2\, e^t + c = 1/2\, e^{x^2} + c$

$x^2 = t$ $\quad t = t(x) = x^2 \quad dt/dx = 2x \quad 2x\,dx = 1\,dt \quad dt = 2x\,dx$

d) $\int tg\,x\, dx = \sin x / \cos x\, dx = \int -dt/t = -\int dt/t = -\ln|t| + c =$
$\cos x = t \quad -\sin x\, dx = dt$

$-\ln|\cos x| + c$ $\quad x^2 = t \quad 2x\,dx = dt$

d') $1/2 \int 2x / 1+x^2\, dx = 1/2 \int \frac{dt}{t} = 1/2 \ln|t| + c = 1/2 \ln(1+x^2) + c$

e) $\int x+3/x^2-1\, dx \quad x+3/x^2-1 = x+3/(x+1)(x-1) \equiv$

$A/x+1 + B/x-1 = A(x-1) + B(x+1) / (x+1)(x-1)$

$x+3 = A(x-1) + B(x+1) = (A+B)x + B - A$

$4 = A\,0 + B\,2 \Rightarrow B = 2 \quad 2 = -2A + 0 \cdot B \Rightarrow A = -1$

$= -\int dx/x+1 + 2\int dx/x-1 = -\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + c = \ln (x-1)^2/|x+1|$

Ciekawostki: $\int \sqrt{x^3+1}\, dx$, $\int e^{-x^2} dx$, $\int \sin x / x\, dx$