09.I.09 Algebra Liniowa ćwiczenia
Obliczanie wyznaczników z rozwinięcia La'Placea

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right] = \det A_1 \cdot \det A_3$$

1. Pokazać, że: **TW:** Mnożenie i dodawanie kolumny i wiersza przez liczbę zachowuje wyznacznik.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) =$$

$b \neq a$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & -\frac{c-a}{b-a}(b-a) & -\frac{c-a}{b-a}(b^2-a^2) \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{b-a}{c-a}\right) =$$

$w2 + w3$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & a-c & -(c-a)(b-a) \\ 0 & 0 & c^2-a^2-cb-ac+ab+a^2 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{b-a}{c-a}\right) = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & a-c & (c-a)(b+a) \\ 0 & 0 & c(c-a)-b(c-a) \end{bmatrix}$$

macierz trójkątna

$$\left(-\frac{b-a}{c-a}\right) = (a-c)\cdot[c(c-a)-b(c-a)]\cdot\left(-\frac{b-a}{c-a}\right) = (a-c)(c-b)(a-b)$$

II sposób:

$$\left(-\frac{b-a}{c-a}\right) = (a-c)\cdot\left[c(c+a) - b(c-a)\right]\cdot\left(-\frac{b-a}{c-a}\right) = (a-c)(c-b)(a-b)$$

II sposób:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{bmatrix}(b-a)(c-a) =$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{bmatrix}(b-a)(c-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

2. Obliczyć

a)
$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 \dots & n \\ \vdots & & & & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & \dots & & \\ 0 & 0 & 3 & & \\ 0 & \dots & & 0 & n \end{bmatrix}}_{w_1+w_n} \det = n!$$

b)
$$\det\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 \end{bmatrix} = +fe\det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & c & 0 \\ 0 & h & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix} =$$

$$-fec\det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & h & d \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix} = -fecahj$$

Z rozwinięcia La'Placea

det [1] = 1 Macierz skośnie symetryczna $a_{ij} = -a_{ji}$ (antysymetryczna) $\begin{matrix} 0 & -a & c \\ a & \ddots & \\ -c & & 0 \end{matrix}$

det [-1] = -1 Macierz odwracalna, odwrotna.

c) D $n \times n$ $d_{ij} = \begin{cases} i & \text{gdy } i = j \\ n & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$ $\det \begin{bmatrix} 1 & n \cdot n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & & & \ddots & \\ n & \dots & & n & n \end{bmatrix} = W_0 - W_p$

$$\det \begin{bmatrix} 1-n & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & 0 & n \\ \vdots & & & 0 & n \\ \vdots & 0 & 3-n & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots & \vdots \\ & & & -1 & n \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} = (1-n)(2-n)(3-n) \dots (-1) n =$$

$$(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots 1 \cdot n = (-1)^{n-1} n!$$

3. Niech A będzie rzeczywistą macierzą kwadratową $n \times n$.

a) Udowodnić, że jeżeli A jest macierzą skośnie symetryczną ($A^T = -A$) oraz n jest liczbą nieparzystą to $\det A = 0$.

$\det A^T = \det(-A) \Rightarrow \det(-A) = (-1)^n \det A$ ponieważ

$A = [a_1|a_2|\dots|a_n]$ oraz $\det(-A) = \det[-a_1|-a_2|\dots|-a_n] = (-1)^n \det A$.

$\det A^T = (-1)^n \det A$, $\det A = (-1)^n \det A \Rightarrow \det A = -\det A \Rightarrow$

$2 \cdot \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$

(b) $(\det A)^2 = (-1)^n$

$A^2 + I = 0$ ...

$z: \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$ $\qquad (\det A)^2 = (-1)^n$

(G) $A^2 + I = 0$ to n jest liczbą parzystą $A^2 = -I$ $\det A^2 = \det(-I)$

4. Wykazać że macierz A jest odwracalna i znaleźć macierz A^{-1}!

TW. Macierz A jest odwracalna wtedy gdy istnieje macierz B taka że

$$A \cdot B = I$$

$\det(A \cdot B) = \det I \quad \det A \cdot \det B = 1 \quad \det B = \frac{1}{\det A} \quad \det A \neq 0$

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$$

$[A^{-1}]_{ij} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} D_{ji}$ gdzie D_{ji} wyznaczamy jako wyznacznik macierzy A otrzymanej z A przez skreślenie j-tego wiersza i i-tej kolumny.

$[A^{-1}]_{11} = (-1)(-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad [A^{-1}]_{21} = (-1)(-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$

$\det A \neq 0$

$Ax = b \,/\, A^{-1}$

$x = A^{-1} b$

Metoda równań liniowych. Wzory Cramera ← M. odwrotna

$[A^{-1}]_{12} = (-1)(-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -1 \quad [A^{-1}]_{22} = (-1)(-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -3$

$[A^{-1}]_{13} = (-1)(-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \quad [A^{-1}]_{23} = (-1)(-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -2$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -7 & 10 & 8 \end{bmatrix}$ sprawdzenie $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -7 & 10 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad x_2 = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \\ \vdots & \vdots & \\ b_1 & a_{n2} & \ldots \end{bmatrix}$

np: a) Wiedząc $x_1 = 3$ i $x_2 = 2$ oraz $2x_1 + 3x_2 = 12$ i $5x_1 - 2x_2 = 11$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ $\det A = -19$ $A_{x_1} = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}$ $\det A_{x_1} = -57$ $x_1 = \frac{-57}{-19} = 3$

b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x - y + 3z = -2 \\ 4x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ $\det A = 6 + 24 + 3 + 4 - 27 + 4 = 14$

$\det A_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} =$