ALGEBRA wykład

13.I.09 r. 5. Równość Parsevala

Tw. $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ – ortonormalny. Następujące warunki są równoważne:

1. X jest zupełny

2. jeżeli $(x, x_j) = 0$ $j = 1, \dots, n$, to $x = 0$

3. X napina przestrzeń V

4. jeżeli $x \in V$, to $x = \sum_{i=1}^{n} (x_i, ~~y~~ y) x_i$

5. jeżeli $x, y \in V$, to $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)(x_i, y)$

6. jeżeli $x \in V$ $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x_i, x)|^2$

$(1) \Rightarrow (2)$ (a.a) $\sim(2) \Rightarrow \sim(1)$ $\quad \sim(2)$ $\bigvee_{x \in V} (x, x_j) = 0 \ \bigwedge_{x_j \in X} x \neq 0$

Można otrzymać $x_{n+1} = \frac{x}{\|x\|}$ $(x_{n+1}, x_i) = \left(\frac{x}{\|x\|}, x_i\right) = \frac{1}{\|x\|}(x, x_i) = 0$

$Y = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ jest ortonormalny $X \subset Y \Rightarrow X \sim$ zupełny

$(2) \Rightarrow (3)$ $\bigvee_{x \in V}$ $x \neq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ dla jakichkolwiek α_i w.sz. $x \neq \sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i$

$x' = x - \sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i \neq 0$ $\quad (x', x_j) = \left(x - \sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i, x_j\right) =$

$$(x, x_j) - \sum_{i=1}^{m} (x_i, x)^* (x_i, x_j) = (x, x_j) - (x_j, x)^* = (x, x_j) - (x, x_j) = 0$$

$x' \neq 0$ i $(x', x_j) = 0 \quad j = 1, \dots, m \Rightarrow \sim(2)$

$(3) \Rightarrow (4)$ $\quad (3) \Rightarrow \bigwedge_{x \in V} x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \Rightarrow (x_j, x) = (x_j, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i) \Rightarrow$

$(x_j, x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overset{\delta_{ij}}{(x_j, x_i)} \Rightarrow (x_j, x) = \alpha_i \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{m} (x_i, x) x_i \Rightarrow (4)$

$(4) \Rightarrow (5)$ $\quad (4) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{m} (x_i, x) x_i \quad y = \sum_{j=1}^{m} (x_j, y) x_j$

$(x, y) = (\sum_{i=1}^{m} (x_i, x) x_i, \sum_{j=1}^{m} (x_j, y) x_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (x_i, x)^* (x_j, y) (x_i, x_j) =$

$\sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (x, x_i)(x_j, y)\, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{m} (x, x_i)(x_i, y) \Rightarrow (5)$

$(5) \Rightarrow (6)$ $\quad$ w (5) $y = x \quad (x, x) = \sum_{i=1}^{m} (x, x_i)(x_i, x) = \sum_{i=1}^{m} (x_i, x)^* (x_i, x) =$

$\sum_{i=1}^{m} |(x_i, x)|^2 \qquad (6) \Rightarrow (1) \quad$ (a.a) $\sim(1) \Rightarrow \sim(6)$

$\sim(1)$ ozn. że istnieje x_0 takie, że $\{x_1, \dots, x_n, x_0\}$ zbiór ortonormalny.

$\|x_0\|^2 \neq \sum_{i=1}^{m} |(x_i, x_0)|^2$ dla $i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \sim(6)$

<u>Nierówność Bessela</u> $\quad \|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} |(x_i, x)|^2$ dla dowolnego zbioru ortonormalnego $\{x_1, \dots, x_m\}$

$\|x\| = \sqrt{x_i y_i} \quad x = x_i x + x_i y + x_i z$

$(AB)^+ = B^+A^+ = BA \quad (AB)^+ = AB \Leftrightarrow BA = AB$

tzn. $[A,B]=0$

Nierówność Schwarza TW: dla dowolnych x i y, z przestrzeni, z iloczynem wewnętrznym zachodzi $|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$

D: zakł., że $y \neq 0$, bo dla $y=0$ $L = |(x,0)| = 0$ $P = \|x\| \cdot \|0\| = 0$

$y \neq 0$ $\left\{\frac{y}{\|y\|}\right\}$ zbiór ortonormalny

$\|x\|^2 \geq \left|\left(\frac{y}{\|y\|}, x\right)\right|^2 \Rightarrow \|x\|^2 \geq \frac{1}{\|y\|^2}|(y,x)|^2 \Rightarrow \|x\|\|y\| \geq |(y,x)|$

Zbiory ortonormalne zupełne — kolejność gra rolę

Ortogonalizacja Grama–Schmidta Niech $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ zbiór liniowo niezależny skonstruujemy z X zbiór $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, który będzie ortonormalny

$x_1 \to y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ unormowanie do jedynki

$x_2 \to y_2 = (x_2 - \alpha_1 y_1) / \|x_2 - \alpha_1 y_1\|$

$(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow (y_1, x_2 - \alpha_1 y_1) = 0 \Rightarrow (y_1 x_2) - \alpha_1 \overset{1}{(y_1, y_1)} = 0$

$y_2 = (x_2 - (\dots$ [illegible]

$y_2 = (x_2 - (y_1, x_2) y_1) / \|x_2 - (y_1, x_2) y_1\| \qquad \alpha_1 = (y_1, x_2)$

$x_2 - (y_1, x_2) y_1 \neq 0$ bo x_1, x_2 są niezależne liniowo

$x_3 \to y_3 = (x_3 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2) / \|x_3 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2\|$

$(y_1, y_3) = 0 \Rightarrow (y_1, x_3) - \alpha_1 \overset{1}{(y_1, y_1)} - \alpha_2 \overset{0}{(y_1, y_2)} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = (y_1, x_3)$

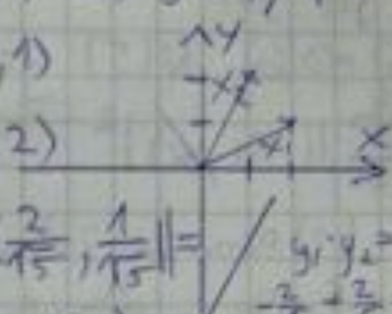
$(y_2, y_3) = 0 \Rightarrow (y_2, x_3) - \alpha_1 \overset{0}{(y_2, y_1)} - \alpha_2 \overset{1}{(y_2, y_2)} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = (y_2, x_3)$

$y_3 = [x_3 - (y_1, x_3) y_1 - (y_2, x_3) y_2] / \|x_3 - (y_1, x_3) y_1 - (y_2, x_3) y_2\|$

$y_n = (x_n - (x_1, x_n) y_1 - (y_2, x_n) y_2 - \ldots - (y_{n-1}, x_n) y_{n-1}) / \| - \| - \|$

<u>Przykład</u> $x_1 \to y_1 = x_1 / \|x_1\| \qquad x_1 = (2,1)$

$\|x_1\| = \sqrt{(x_1, x_1)} = \sqrt{4+1}$; $= \left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right) \qquad x_2 = (1,2)$



$x_2 \to y_2 = \left[(1,2) - \frac{4}{\sqrt5} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)\right] / \left\|(1,2) - \frac{4}{\sqrt5} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)\right\| =$

$\frac{(1,2) - \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)}{\left\|\left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)}{\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{36}{25}}} = \frac{\left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)}{\frac{3\sqrt5}{5}} = \left(-\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right)$

$y_1 \cdot y_2 = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 0$

$y_1 x_2 = \frac{2}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5} = \frac{4}{\sqrt5}$

<u>Zbiory ortonormalne zupełne.</u>

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ – baza ortonormalna A – przekształcenie liniowe

$A x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j \qquad (x_k, A x_i) = \left(x_k, \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j\right) = \sum a_{ji} \underbrace{(x_k, x_j)}_{\delta_{kj}} = a_{ki}$

$a_{kj} = (x_k, A x_i)$

drugiego
przestawić kolejność tzn. sprzężenie w C
+ = przestawione w I k. oraz sprzężenie

Tw. A jest przekształceniem liniowym, to $A=0 \Leftrightarrow \bigwedge_{x,y \in V} (x, Ay) = 0$

D $\Rightarrow$ wektor zerowy $\Leftarrow \bigwedge_{x,y} (x, Ay) = 0$, wiemy $x = Ay$

$(Ay, Ay) = 0 \rightarrow Ay = 0 \Rightarrow A = 0$

Df. A^+ (dagger) jest przekształceniem sprzężonym do A $\Leftrightarrow$

$\bigwedge x, y \in V \; (x, Ay) = (y, A^+x)^*$

$(x, Ay) = (y, A^+x)^* \Rightarrow (x, Ay) = (A^+x, y)$ zatóżmy, że

A^+ istnieje i jest wyznaczone jednoznacznie. Ponadto

B sprzężone do A i C sprzężone do A

$\bigwedge x, y \; (x, Ay) = (Bx, y) \quad (x, Ay) = (Cx, y)$

$0 = (Bx, y) - (Cx, y) \Rightarrow 0 = (y, Bx) - (y, Cx) \Rightarrow (y, [B-C]x) = 0$

$\Rightarrow B - C = 0 \Rightarrow B = C$

A^+ jest odwzorowaniem liniowym $A^+(\alpha x + \beta y) = \alpha A^+ x + \beta A^+ y$

$(A^+[\alpha x + \beta y], z) = (\alpha x + \beta y, Az) = \alpha^*(x, Az) + \beta^*(y, Az) =$

<u>A^+ jest odwzorowaniem liniowym</u> $A^+(\alpha x+\beta y)=\alpha A^+x+\beta A^+y$

$(A^+[\alpha x+\beta y],z)=(\alpha x+\beta y,Az)=\alpha^*(x,Az)+\beta^*(y,Az)=$

$\alpha^*(A^+x,z)+\beta^*(A^+y,z)=(\alpha A^+x,z)+(\beta A^+y,z)=$

$(\alpha A^+x+\beta A^+y,z)$ $\quad A^+[\alpha x+\beta y]=\alpha A^+x+\beta A^+y$

$A\to a_{ij}=(x_i,Ax_j)$ $\quad \{x_i\}_{i=1}^{m}$ – zbiór ortonormalny

Udowodnić $(A^+)^+=A$ $\quad \bigwedge_{x,y}(x,Ay)=(A^+x,y)$ $\quad \bigwedge_{x,y}(x,A^+y)=$

$((A^+)^+x,y)$ $\quad (A^+y,x)^*=(y,(A^+)^+x)^*$ $\quad (y,Ax)=(y,(A^+)^+x)\Rightarrow$

$(y,[A-(A^+)^+]x)=0\Rightarrow(A^+)^+=0$ c.b.d

$A^+_{ij}=(x_i,A^+x_j)=(Ax_i,x_j)=(x_j,Ax_i)^*=a_{ji}^*$ $\quad [A^+]_{ij}=[A]_{ji}^*=a_{ji}^*$

Przekształcenia samosprzężone

<u>Df</u> A jest liniowym przekształceniem samosprzężonym $\Leftrightarrow A=A^+$

$\bigwedge_{x,y\in V}(x,Ay)=(Ax,y)$

<u>Tw.</u> Załóżmy, że A jest samosprzężone i B jest samosprzężone.

AB jest samosprzężone gdy AB komutują $[A,B]=0$

$\underbrace{[A,B]=AB-BA=0 \quad \underline{D}:\ A=A^+ \text{ i } B=B^+ \quad (AB)^+=B^+A^+=BA}_{\text{przestawić}}$

$i^* = -i$ $\nearrow \mathbb{R}$

*Wartości oczekiwane wielkości opisywane przez $\mathbb{Z}$

Załóżmy dany przekształcenia $(x, ABy) = (x, A[By]) = (A^+x, By) =$

$(B^+(A^+x), y) = (\underbrace{B^+A^+}\, x, y) = (AB)^+ \Rightarrow (AB)^+ = B^+A^+$

<u>TW.</u> A jest przekształceniem liniowym samosprzężonym w przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb rzeczywistych. $A = 0 \Leftrightarrow (x, Ax) = 0 \ \bigwedge_{x \in V}$

<u>D:</u> $\Leftarrow$ $0 = (x+y, A[x+y]) = (x, A\overset{0}{x}) + (x, Ay) + (y, Ax) + (\overset{0}{y}, Ay)$

$(x, Ay) + (y, Ax) = 0 \qquad (x, Ay) + (Ax, y) = 0$

$(x, Ay) + (x, Ay) = 0 \qquad 2(x, Ay) = 0 \ \bigwedge x, y \in V \Rightarrow A = 0$

<u>TW.</u> A jest liniowym przekształceniem na ciele liczb zespolonych.

$A = 0 \Leftrightarrow (x, Ax) = 0 \quad \bigwedge x \in V$

<u>D:</u> $\Leftarrow$ połóżmy, że $(x, Ay) + (y, Ax) = 0$ (I) Możemy $y := iy$

$(x, A(iy)) + (iy, Ax) = 0$ (II) $i(x, Ay) - i(y, Ax) = 0$

$(x, Ay) - (y, Ax) = 0$ (II*) $\quad$ (I) $+ (2^*) \Rightarrow (x, Ay) = 0 \Rightarrow A = 0$

<u>TW.</u> Operator liniowy A w przestrzeni wektorowej nad ciałem